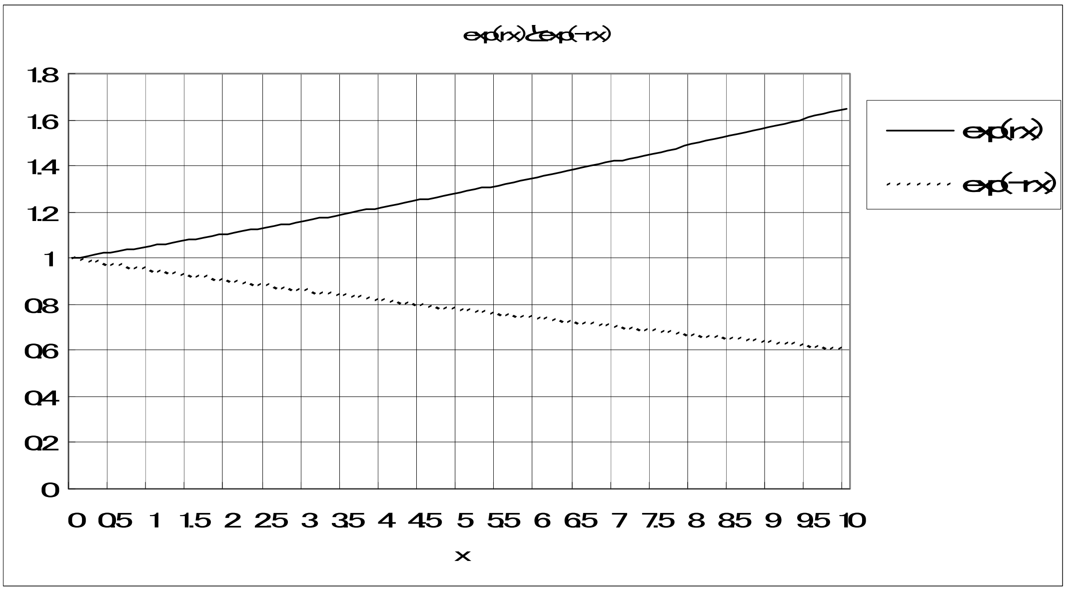
# ＜章末問題の解答＞

**1.1** $r=0.05$であるとき、$y=e^{rx}$は、$y'=re^{rx}>0$, $y''=r^2e^{rx}>0$であるので、閉区間$0\le x\le 10$では、単調増加な凸関数となる。また、$y=e^{-rx}$は、$y'=-re^{-rx}<0$, $y''=r^2e^{-rx}>0$であるので、閉区間$0\le x\le 10$では、単調減少な凸関数となる。この関係は、図からも分かる。




**1.2** コールオプションの行使価格を$K$とし、コールオプション価格$c$を行使価格$K$の関数$c=c(K)$とする。このとき行使価格$K$による数値微分は、(1.17)式を用いると次のようになる。

$$\frac{c(K+\Delta K)-C(K-\Delta K)}{2\Delta K}$$

与えられたパラメータを用いて$\Delta K=1$円（$\Delta K/K=0.1\%$）として数値微分を計算すると

$$\frac{c(K+\Delta K)-C(K-\Delta K)}{2\Delta K}=\frac{32.8882-33.8702}{2*1}=-0.4910$$

となる。

1.3 シンプソンの公式を用いて数値積分を行うと

$$\int_0^5 r(t)dt=\int_0^5 0.05+0.03\times\sin(t)dt=0.2722$$

となる。よって

$$\exp\left(-\int_0^5 r(t)dt\right)=\exp(-0.2722)=0.7622$$

となる。

**1.4** 両辺を $r$ で微分すると、

$$\frac{df(r)}{dr} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{i \times C}{(1+r)^{i+1}} < 0$$

よって利回りが高くなると（$r$ が大きくなると）、債券価格が低くなる（ $f$ が小さくなる）ことがわかる。与えられた条件で $f(r) = 100$ となる $r$ を数値計算で求めると $r = 0.05$ となる。

**1.5** $\log(x) = a,\ \log(y) = b,\ \log(xy) = c$ とおく。対数関数と指数関数との関係より $x = e^a,\ y = e^b,\ xy = e^c$ である。したがって、 $xy = e^a e^b = e^{a+b}$ であり、 $xy = e^c$ でもあるので、 $a + b = c$ となる。これより $\log(x) + \log(y) = \log(xy)$ であることがわかる。
次に、 $\log(x^y) = a,\ \log(x) = b$ とおく。対数関数と指数関数との関係より、 $x^y = e^a, x = e^b$ である。 $x^y = (e^b)^y = e^{by}$ であり、 $x^y = e^a$ でもあるので、 $a = by$ となる。これより、 $\log(x^y) = y\log(x)$ であることがわかる。

**1.6** $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ という関係があるので、(1.4)式は

$$\begin{aligned} p &= -S\{1 - \Phi(d)\} + Ke^{-rT}\left\{1 - \Phi(d - \sigma\sqrt{T})\right\} \\ &= S \cdot \Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d - \sigma\sqrt{T}) - S + Ke^{-rT} \\ &= c - S + Ke^{-rT} \end{aligned}$$

となる。

**1.7** プット・コール・パリティ(1.5)式を $S$ 偏微分すると、

$$\left(p\left(d(S)\right)\right)' = \frac{\partial p}{\partial S} = \frac{\partial c}{\partial S} - 1 = \Phi\left(d(S)\right) - 1 = \left(c\left(d(S)\right)\right)' - 1$$

となり、この値がプット・オプションのデルタとなる。同様に、ガンマは、

$$\left(p\left(d(S)\right)\right)'' = \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S}\left(\Phi(d(s) - 1\right) = \frac{\Phi'\left(d(S)\right)}{S\sigma\sqrt{T}} = \left(c\left(d(S)\right)\right)''$$

となる。

**1.8** コールオプション価格(1.1)より

$$\rho_c = \frac{\partial c}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left[S\Phi(d) - Ke^{-rT}\Phi\left(d - \sigma\sqrt{T}\right)\right] = KTe^{-rT}\Phi\left(d - \sigma\sqrt{T}\right)$$

プット・コールパリティ(1.5)の両辺を $r$ で微分すると

$$\rho_p = \rho_c - TK \cdot e^{-rT}$$

となる。

**1.9** $f(x)=e^x$ とする。$n=0,1,\cdots$ に対して $f^{(n)}(x)=e^x$ で $f^{(n)}(0)=1$ であるので、マクローリン展開は

$$f(x)=e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

となる。同様に、$f(x)=\log(1+x)$ とする。$n=1,2,\cdots$ に対して $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$ で

$f^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{1}$ あるので、マクローリン展開は

$$f(x)=e^x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

となる。

**1.10** (1.34)式で $f(x)=\log(x)$ とすると、$f_t(t,x)=0,\ f_x=\dfrac{1}{x},\ f_{xx}=\dfrac{-1}{x^2}$ であるので

$$dy=\left(f_t+x\mu f_x+\frac{x^2\sigma^2}{2}f_{xx}\right)dt+f_x x\sigma\,dz$$

$$=\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)dt+\sigma\,dz$$

となる。

1.11 Excel シート参照。

解析解　　　　　　　　　　：41.0887
台形公式による数値解　　　：41.0929
シンプソンの公式による数値解：41.0763

# ＜章末問題の解答＞

**2.1** ①：$\Omega = A \cup A^c,\ A \cap A^c = \phi$ であるので、$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$ となる。これより、$P(A^c) = 1 - P(A)$ であることがわかる。
②：$A \subset B$ なので $A \cup C = B,\ A \cap C = \phi$ となる $C$ が存在する。よって、$P(B) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) \geq P(A)$ となるので、$P(A) \leq P(B)$ であることがわかる

**2.2** $F(x)$ は確率変数 $X$ の分布関数を表していると考えて、$F(x) = P\{X \leq x\}$ とする。$x < y$ に対して $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$ であるので、章末問題 2.1 ②より $P\{X \leq x\} \leq P\{X \leq y\}$、つまり $F(x) \leq F(y)$ であることがわかる。$\Omega = \{X \leq x\} \cup \{x < X\}$ であるので、$x \to \infty$ の時は $\{x < X\} \to \phi$ となるので $P\{X \leq x\} = F(x) \to 1$ となる。同様に $x \to -\infty$ の時に $\{X \leq x\} \to \phi$ となるので $P\{X \leq x\} = F(x) \to 0$ となることがわかる。

**2.3** 正規確率は実現値に比例するので、実現値の総サンプル数は $\sum_{i=1}^{10} x_i = 55$ である。

生起確率 $p(x)$ を表にすると、

| | | | | | | | | | | | 総数 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Xの実現値 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 55 |
| 生起確率 | 0.0182 | 0.0364 | 0.0545 | 0.0727 | 0.0909 | 0.1091 | 0.1273 | 0.1455 | 0.1636 | 0.1818 | 1.0000 |

となる。これより

$$E[X] = \sum_{x=1}^{10} xP\{X = x\} = 7$$

$$E[e^X] = \sum_{x=1}^{10} e^x P\{X = x\} = 5966.8$$

が得られる。

**2.4** $X$ の確率密度関数を $g(x) = a \times \sin(x)$ とすると、$1 = \int_1^{\pi} g(x)dx = a\int_1^{\pi} \sin(x)dx$ であり、

$$a = \frac{1}{\int_1^{\pi} \sin(x)dx} = \frac{1}{1+\cos(1)}$$ となるので、

$$E[\log(X)] = \int_1^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos(1)} \log(x)dx = 0.5720$$

となる。

**2.5** $X$ の連続確率密度関数が存在すると仮定し $f(x)$ とおく。

$$E[g_2(X)] - E[g_1(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g_2(x) f(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x) f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \{g_2(x) - g_1(x)\} f(x) dx \geq 0$$

となる。最後の不等号は仮定 $g_1(x) \leq g_2(x)$ による。

**2.6**

$$E[u^X d^{n-X}] = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x \left(\frac{r-d}{u-d}\right)^x \left(\frac{u-r}{u-d}\right)^{n-x} u^x d^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x \left(\frac{r-d}{u-d}u\right)^x \left(\frac{u-r}{u-d}d\right)^{n-x}$$

$$= \left(\frac{r-d}{u-d}u + \frac{u-r}{u-d}d\right)^n = r^n$$

**2.7** $E[X] = \sum_{x=0}^{20} {}_{20}C_x (0.5)^x (0.5)^{20-x} x = \sum_{x=0}^{20} {}_{20}C_x (0.5)^{20} x = 10$

$$E[X^2] = \sum_{x=0}^{20} {}_{20}C_x (0.5)^{20} x^2 = 105$$

であるので、分散は

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 = 5$$

標準偏差は

$$E\sqrt{V[X]} = \sqrt{5}$$

となる。

**2.8** ①の性質

$$V[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

②の性質

$$V[X+b] = E[(X + b - E[X+b])^2] = E[(X - E[X])^2] = V[X]$$

③の性質

$X$ を定数とすると、$X = E[X]$ であるので

$$V[X] = E[(X - E[X])^2] = E[(X - X)^2] = 0$$

$V[X] = 0$ とすると、$V[X] = E[(X - E[X])^2] = 0$ となるので、ほとんどいたるところで、$(X - E(X))^2 = 0$、つまり $X = E[X]$ とならなければならない。よって、$X$ は定数である。ゆえに

$X$ は定数 $\Leftrightarrow$ $V[X] = 0$

が成り立つ。

**2.9** 98%点(下側 2%)点を $R_\alpha$ とし、$\alpha = \log(R_\alpha)$ とする。$\log(R) = X \sim N(0, 0.1)$ なので、

$$0.02 = P(R \leq R_\alpha) = P\left(X = \log(R) \leq \alpha\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi \times 0.1}} e^{-x^2/2\times 0.1} dx = \int_{-\infty}^{\alpha/\sqrt{0.1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-s^2/2} ds$$

である。標準正規分布の表より $\dfrac{\alpha}{\sqrt{0.1}} \cong -2.055$ である。これより、$R_\alpha = e^\alpha = e^{-2.055\times\sqrt{0.1}}$ $= 0.5230$ となる。

**2.10**

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} e^{tx} = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x (pe^t)^x (1-p)^{n-x} = (1-p+pe^t)^n$$

$e^t$ をマクローリン展開すると

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = (1-p+pe^t)^n = (1-p+p(1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots))^n$$

$$=1+npt+\frac{1}{2}\{np+(n^2-n)p^2\}t^2+\cdots$$

よって $E[X]=np,\ E[X^2]=np+(n^2-n)p^2$ であることがわかる。ゆえに $V[X]$ $= E[X^2]-E[X]^2 = np(1-p)$ である。

**2.11** 積率母関数は、

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} e^{tn} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^n e^{-\lambda}}{n!} = e^{-\lambda(1-e^t)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^n e^{-\lambda e^t}}{n!} = e^{-\lambda(1-e^t)}$$

次に平均と分散を積率母関数より求める。

$$m_X(t) = e^{-\lambda(1-e^t)} = 1-\lambda(1-e^t)+\frac{1}{2}\lambda^2(1-e^t)^2+\cdots$$

$$=1-\lambda(-t-\frac{t^2}{2}-\cdots)+\frac{1}{2}\lambda^2(t^2+\cdots)+\cdots$$

$$=1+\lambda t+\frac{1}{2}(\lambda+\lambda^2)t^2+\cdots$$

よって、$E[X]=\lambda,\ V[X]=E[X^2]-E[X]^2=\lambda+\lambda^2-\lambda^2=\lambda$ となる。

# ＜章末問題の解答＞

3.1 同時密度関数が $(x+y)^2$ に比例し、

$$\iint_{[1,2]}(x+y)^2\,dxdy=\int_1^2 dx\int_1^2(x^2+2xy+y^2)dy=\int_1^2\left[\,x^2y+xy^2+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=1}^{2}dx$$

$$=\int_1^2\left[\,x^2y+xy^2+\frac{1}{3}y^3\right]_{y=1}^{2}dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{3}x\right]_{x-1}^{2}$$

$$=\frac{7}{3}+\frac{3}{2}\times 3+\frac{7}{3}=\frac{14}{3}+\frac{9}{2}=\frac{28+27}{6}=\frac{55}{6}$$

であるので、$X, Y$ のそれぞれの周辺密度関数 $f_X(x), f_Y(y)$ は

$$f_X(x)=\int_1^2\frac{6}{55}(x+y)^2\,dy=\frac{6}{55}x^2+\frac{18}{55}x+\frac{14}{55}$$

$$f_Y(y)=\int_1^2\frac{6}{55}(x+y)^2\,dx=\frac{6}{55}y^2+\frac{18}{55}y+\frac{14}{55}$$

となる。

3.2

$$E\left[aX+bY\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(ax+by)\,f(x,y)\,dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}axf(x,y)\,dxdy+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}byf(x,y)\,dxdy$$

$$=a\int_{-\infty}^{\infty}x\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy\right]dx+b\int_{-\infty}^{\infty}y\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx\right]dy$$

$$=a\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)\,dx+b\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)\,dy$$

$$=aE\left[X\right]+bE\left[Y\right]$$

3.3

$$C[X,Y]=E\left[(X-E[X])(Y-E[Y])\right]$$

$$=E\left[XY-XE[Y]-YE[X]+E[X]E[Y]\right]$$

$$=E[XY]-E[X]E[Y]$$

$$C[X,a]=E[Xa]-E[X]E[a]=aE[X]-aE[X]=0$$

$$C[X+a,Y+b]=E\left[\left(X+a-E[X+a]\right)\left(Y+b-E[Y+b]\right)\right]$$

$$=E\left[(X-E[X])(Y-E[Y])\right]=C[X,Y]$$

$$C[aX,bY]=E[aXbY]-E[aX]E[bY]$$

$$=abE[XY]-abE[X]E[Y]=abC[X,Y]$$

3.4

$$V[aX+bY]=E\left[\left(aX+bY-E[aX+bY]\right)^2\right]=E\left[\left\{a\left(X-E[X]\right)+b\left(Y-E[Y]\right)\right\}^2\right]$$

$$=E\left[a^2\left(X-E[X]\right)^2\right]+2abE\left[\left(X-E[X]\right)\left(Y-E[Y]\right)\right]+b^2E\left[\left(Y-E[Y]\right)^2\right]$$

$$= a^2V[X] + 2abC[X,Y] + b^2V[Y]$$

$$V[R_P] = E\left[\left(R_P - E[R_P]\right)^2\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\left(R_i - E[R_i]\right)\right)^2\right]$$

$$= E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j\left(R_i - E[R_i]\right)\left(R_j - E[R_j]\right)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j E\left[\left(R_i - E[R_i]\right)\left(R_j - E[R_j]\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j C[R_i, R_j]$$

**3.5**

$$V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = V\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - E[X_i]\right)\right)^2\right] = E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_i - E[X_i]\right)\left(X_j - E[X_j]\right)\right]$$

$X_1, \cdots, X_n$ は無相関なので、$i \neq j$ のとき $E\left[\left(X_i - E[X_i]\right)\left(X_j - E[X_j]\right)\right] = 0$ となる。よって、

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(X_i - E[X_i]\right)\left(X_j - E[X_j]\right)\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - E[X_i]\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} V[X_i]$$

となる。

**3.6** $f(x \mid y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ であるので、

$$f(x \mid y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}Q + \frac{\left(y-\mu_Y\right)}{2\sigma_Y^2}\right)$$

となる。

$$-\frac{1}{2}Q + \frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}$$

$$= -\frac{1}{2\sigma_X^2(1-\rho^2)}\left[(x-\mu_X)^2 - 2\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(x-\mu_X)(y-\mu_Y) + \rho^2\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}(y-\mu_Y)^2\right]$$

$$= -\frac{1}{2\sigma_X^2(1-\rho^2)}\left[x - \left(\mu_X + \frac{\rho\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y)\right)\right]$$

となるので、(3.17)が得られる。$\rho = 0$ とすると、

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_X}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}\right\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}\exp\left\{-\frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}\right\}$$

$$= f_X(x) f_Y(y)$$

となるので、$X$ と $Y$ は独立であることがわかる。

3.7 条件付期待値の性質より $E\left[e^{sX+tY}\right]=E\left[E\left[e^{sX}\mid y\right]e^{tY}\right]$ となる。

$$E\left[e^{sX}\mid y\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{sx}f(x\mid y)dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(sx-\frac{\left(x-\mu_x-\frac{\rho\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y)\right)^2}{2\sigma_x^2(1-\rho^2)}\right)dx$$

被積分関数の指数部分を計算すると

$$sx-\frac{(x-B)^2}{2\sigma_X^2(1-\rho^2)}$$

$$=\frac{-\left(x-\left(B+\sigma_X^2(1-\rho^2)s\right)\right)^2}{2\sigma_X^2(1-\rho^2)}+\mu_X s+\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y)s+\frac{1}{2}\sigma_X^2(1-\rho^2)s^2$$

但し、

$$B=\mu_X+\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y-\mu_Y)$$

となるので、

$$E\left[e^{sX}\mid y\right]=\exp\left(\mu_X s+\frac{1}{2}\sigma_X^2(1-\rho^2)s^2-\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\mu_Y s+\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}sy\right)$$

である。よって、

$$E\left[e^{sX+tY}\right]=E\left[E\left[e^{sX}\middle|y\right]e^{tY}\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\mu_X s+\frac{1}{2}\sigma_X^2(1-\rho^2)s^2-\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\mu_Y s+\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}sy+ty\right)f_Y(y)dy$$

$$=\exp\left(\mu_X s+\frac{1}{2}\sigma_X^2(1-\rho^2)s^2-\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}\mu_Y s\right)$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}+ty+\rho\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}s(y-\mu_Y)\right)dy$$

$$=\exp\left(\mu_X s+\mu_Y t+\frac{1}{2}\left\{\sigma_X^2 s^2+2\rho\sigma_X\sigma_Y st+\sigma_Y^2t^2\right\}\right)$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\left(y-\left(\mu_Y+\sigma_Y^2t+\rho\sigma_X\sigma_Y s\right)\right)^2}{2\sigma_Y^2}\right)dy$$

$$=\exp\left(\mu_X s+\mu_Y t+\frac{1}{2}\left\{\sigma_X^2 s^2+2\rho\sigma_X\sigma_Y st+\sigma_Y^2t^2\right\}\right)$$

となる。

例題 3.17 より

$$E\left[e^{sX+tY}\right]=e^{\mu_X s+\mu_Y t}E\left[\exp\left((s\sigma_X+t\rho\sigma_Y)Z_1+t\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}Z_2\right)\right]$$

$$=e^{\mu_X s+\mu_Y t}E\left[e^{(s\sigma_X+t\rho\sigma_Y)Z_1}\right]E\left[e^{t\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}Z_2}\right]$$

最後の等式は $Z_1, Z_2$ が独立(無相関な正規確率変数)であることに依る。

$$E\left[e^{(s\sigma_X+t\rho\sigma_Y)Z_1}\right]=\exp\left(\frac{1}{2}\left\{\sigma_X^2 s^2+2\rho\sigma_X\sigma_Y st+\rho^2\sigma_Y^2 t^2\right\}\right)$$

$$E\left[e^{t\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}Z_2}\right]=\exp\left(\frac{1}{2}\left\{\sigma_Y^2(1-\rho^2)t^2\right\}\right)$$

であるので、

$$E\left[e^{sX+tY}\right]=\exp\left(\mu_X s+\mu_Y t+\frac{1}{2}\left\{\sigma_X^2 s^2+2\rho\sigma_X\sigma_Y st+\sigma_Y^2 t^2\right\}\right)$$

となり、2 変量正規分布の積率母関数と同じになる.

**3.8** $1_{\{\bullet\}}$ を定義関数とする。

$$P\{X+Y=n\}=E\left\{1_{\{X+Y=n\}}\right\}=\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}p(x,y)1_{\{x+y=n\}}$$

$$=\sum_{x=0}^{\infty}p_X(x)\sum_{y=0}^{\infty}p_Y(y)1_{\{y=n-x\}}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}P\{Y=n-k\}$$

となる。ただし、3 番目の等号は $X,Y$ が独立であることに依る。

$X \sim B(10,0.4), Y \sim B(20,0.4)$ のときの $X+Y$ の従う確率関数は Excel を参照せよ。

**3.9** 3 証券 $(A,B,C)$ のポートフォリオを考える。$S_i(t),\ i=A,B,C$ を証券価格とし、それぞれの初期投資額を $m_iS_i(0)$ とすると、投資比率は

$$w_i=\frac{m_iS_i(0)}{m_AS_A(0)+m_BS_B(0)+m_CS_C(0)}$$

となる。ポートフォリオの収益率は

$$R_P=\frac{m_AS_A(t)+m_BS_B(t)+m_CS_C(t)}{m_AS_A(0)+m_BS_B(0)+m_CS_C(0)}$$

$$=\sum_{i=A,B,C}\frac{m_iS_i(0)}{m_AS_A(0)+m_BS_B(0)+m_CS_C(0)}\frac{S_i(t)}{S_i(0)}=\sum_{i=A,B,C}w_iR_i$$

となるので定理 3.19 が示される。

一般の証券数が $n$ のときも同様であり、証券価格を $S_i(t),\ i=1,\cdots,n$ とし、証券 $i$ への投資額を $m_iS_i(0)$ とする。$n$ 証券からなるポートフォリオでの証券 $i$ の投資比率は

$$w_i=\frac{m_iS_i(0)}{\sum_{i=1}^{n}m_iS_i(0)}$$

となる。またポートフォリオの収益率は

$$R_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i S_i(t)}{\sum_{i=1}^{n} m_i S_i(0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i S_i(0)}{\sum_{i=1}^{n} m_i S_i(0)} \frac{S_i(t)}{S_i(0)} = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i$$

となり、定理 3.19 が示される。

3.10 (3.27)式を $w_1, w_2$ で微分してゼロと置いた時の $w_1, w_2$ を $w_1^*, w_2^*$ とする。 $w_1$ で微分してゼロと置いた式より

$$\mu_1 - r = \frac{w_1^*(\mu_1 - r) + w_2^*(\mu_2 - r)}{w_1^{*2}\sigma_1^2 + w_2^{*2}\sigma_2^2 + 2w_1^* w_2^* \rho\sigma_1\sigma_2}\left(w_1^*\sigma_1^2 + w_2^*\rho\sigma_1\sigma_2\right)$$

となる。また

$$\mu_M - r = w_1^*(\mu_1 - r) + w_2^*(\mu_2 - r)$$

$$\sigma_M^2 = w_1^{*2}\sigma_1^2 + w_2^{*2}\sigma_2^2 + 2w_1^* w_2^* \rho\sigma_1\sigma_2$$

であるので、

$$\mu_1 - r = \frac{\mu_M - r}{\sigma_M^2}\left(w_1^*\sigma_1^2 + w_2^*\rho\sigma_1\sigma_2\right)$$

であることがわかる。

3.11 推定結果は Excel を参照。ベータ値は、市場ポートフォリオのリスクプレミアムを基準とした時の証券(ポートフォリオ)のリスクプレミアムの比率であり、ベータ値が大きい証券(ポートフォリオ)は大きなリスクプレミアムを要求していることになり、よりリスキーな証券であることがわかる。アルファ値は市場ポートフォリオのリスクプレミアムとは関係ない値であり、証券(ポートフォリオ)固有のリスクに対するプレミアムを表していると考えることができる。

# ＜章末問題の解答＞

**4.1**

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}66 & 14\\ 62 & 18\end{pmatrix}\ ,\quad \mathbf{BA}=\begin{pmatrix}22 & 58\\ 18 & 62\end{pmatrix}$$

**4.2**

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}\ ,\quad \mathbf{BA}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$|\mathbf{AB}|=0,\ |\mathbf{BA}|=0,\ |\mathbf{A}|=0,\ |\mathbf{B}|=0$$

**4.3** $n=2$ の時と同様。

**4.4** 係数行列を $\mathbf{A}$ 、変数ベクトルを $\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^{\mathrm{T}}$ 、方程式の右辺の定数ベクトルを $\mathbf{b}=(1,4,1,1,-7)^{\mathrm{T}}$ とする。

① $|\mathbf{A}|=-54\neq 0$ であるので、クラメルの公式より

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 3 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 3\\ -7 & -1 & 3 & -2 & 4\end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}=-7\ ,\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 4 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 0 & 3\\ 2 & -7 & 3 & -2 & 4\end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}=-2\ ,$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & -7 & -2 & 4\end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}=1\ ,\quad x_4=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 4 & 0\\ -1 & 3 & 3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 3 & -7 & 4\end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|}=5\ ,$$

$$x_5 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 7 \end{vmatrix}}{|\mathbf{A}|} = 3$$

②方程式を行列表示すると $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ であり、$|\mathbf{A}| = -54 \neq 0$ であるので、

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\begin{pmatrix} -49 & 50 & 8 & 51 & -24 \\ -18 & 36 & -18 & 0 & 0 \\ 8 & -28 & 2 & 6 & -6 \\ 10 & -62 & 16 & -6 & 6 \\ 19 & -26 & -2 & -33 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

となる。

**4.5** 行列 $\mathbf{A}$ の固有値 $\lambda_i$ $(i = 1,2 \cdots n)$ に対応する正規化された固有ベクトルを $v_i$ $(i = 1,2 \cdots n)$ とする。

$diag(a_1, a_2, \cdots a_n)$ は $\{a_1, a_2, \cdots a_n\}$ を対角要素にもつ $n$ 次の正方行列を表すものとする。

$$diag(a_1, a_2, \cdots a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & a_n \end{pmatrix}$$

トレース $Tr(\mathbf{A})$ は $n$ 次の正方行列 $\mathbf{A}$ の対角要素の和を表すものとする。

$$Tr(A) = Tr\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

またトレースの性質として、$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ を $n$ 次の正方行列とすると、$Tr(\mathbf{AB}) = Tr(\mathbf{BA})$ となる。

これらを用いて、$\mathbf{\Lambda} = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$　$\mathbf{V} = [v_1\ v_2\ \cdots v_n]$ とおくと、$\mathbf{\Lambda}$ は $n$ 次の対角行列、$\mathbf{V}$ は $n$ 次の正規直交行列である。行列の肩の T は転置を表すとすると、$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{AV} = \mathbf{\Lambda}$ となる。これより、両辺の行列式を計算すると

$$|\text{左辺}| = |\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{AV}| = |\mathbf{V}^{\mathrm{T}}| \cdot |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{V}| = |\mathbf{V}^{\mathrm{T}}| \cdot |\mathbf{V}| \cdot |\mathbf{A}| = |\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{VA}| = |\mathbf{A}|$$

$$|\text{右辺}| = |\mathbf{\Lambda}| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

よって、$|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ であることがわかる。

また、$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{AV} = \mathbf{\Lambda}$ の両辺のトレースを計算すると

$$Tr(\text{左辺}) = Tr(\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{AV}) = Tr(\mathbf{AVV}^{\mathrm{T}}) = Tr(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$Tr(\text{右辺}) = Tr(\mathbf{\Lambda}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii}$$

よって、$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ii}$ となることがわかる。

**4.6**

$$|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{C}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= (\lambda-1)^3 + (-2)\cdot(-2)\cdot 2 + 2\cdot(-2)\cdot(-2) \\ &\qquad - (-2)\cdot(\lambda-1)\cdot(-2) - (\lambda-1)\cdot 2\cdot 2 - (\lambda-1)\cdot(-2)\cdot(-2) \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda - 27 \\ &= (\lambda-3)^2(\lambda+3) \end{aligned}$$

よって固有値は、$\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = -3$ となる。

$\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ の時には

$$3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

であるので

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

となり、固有ベクトルは

$$\mathbf{x}_1 = v_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。ただし、$v_1$ は 0 ではない任意の実数である。また、$\lambda_3 = -3$ の時には、

$$-3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

であるので

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

となり、固有ベクトルは

$$\mathbf{x}_2 = v_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。ただし、$v_2$ は 0 ではない任意の実数である。

**4.7** 4.6 の C のスペクトル分解は

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T$$

$$= v_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + v_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= v_1\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + v_1\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + v_2\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

である。

**4.8** 3 次の共分散行列において、(4.35)の下の式を用いると

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & 0 \\ \dfrac{\sigma_{21}}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \sqrt{\sigma_{22}-\dfrac{\sigma_{21}^2}{\sigma_{11}}} & 0 \\ \dfrac{\sigma_{31}}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \dfrac{1}{c_{22}}\left(\sigma_{32}-\dfrac{\sigma_{21}\sigma_{31}}{\sigma_{11}}\right) & \sqrt{\sigma_{33}-\dfrac{\sigma_{31}^2}{\sigma_{11}}-c_{32}^2} \end{pmatrix}$$

となる。これより

$$\mathbf{CC}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

となることが確かめられる。

**4.9** 与えられた相関行列、標準偏差ベクトルより分散共分散行列は $(\mathbf{\Sigma})_{ij}=\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$,( $i, j=1,\cdots,6$)と求めることができる。投資比率は等分であるので $w_i=1/6,\ i=1,\cdots,6$ である。よってポートフォリオの分散を $\sigma_p^2$ とすると $\sigma_p^2=\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Sigma}\mathbf{w}=0.000413$ となる。平均はゼロであるので 99%点(下側 1%点)は $2.33\times\sigma_p=0.04735$ であり、ポートフォリオの現在価値が 100 億円であるので 99%VaR は $0.04735\times 100$億円$=4.735$億円となる。

VaR が減っている理由は、演習 4.22 ではポートフォリオの資産間の相関が全て正であるのに対して、ここでは、相関が負となる(逆相関)となる資産の組み合わせがあり、収益の変動を相殺するためにポートフォリオとしての変動(標準偏差)が小さくなるためである。

# ＜章末問題の解答＞

**5.1** 基本統計量は付録 Excel ファイルの演習 5.8 を参照。各データが正規分布に従う時には、データ数が 13 個なので標本歪度～ $N(0,6/13)$ 、標本尖度～ $N(3,24/13)$ となる。よって、有意水準を 5%とすると、(1)歪度が $-1.0015$ より小さい、または $1.0015$ より大きい場合、(2)尖度が $-1.0062$ より小さい、または $7.0062$ より大きい場合、各データの正規性が棄却されることになる。各データの歪度、尖度は以下の表に示すようになっており、公定歩合、企業倒産率の正規性が棄却されることがわかる。

表：歪度＆尖度

| | 為替 | マネーサプライ | 公定歩合 | 企業倒産率 |
|---|---|---|---|---|
| 歪度 | 0.81 | 0.42 | 1.19 | 1.43 |
| 尖度 | 2.17 | 1.22 | 2.86 | 3.54 |

**5.2** 相関係数は付録 Excel ファイルの演習 5.8 を参照。散布図は Excel ファイルを参照。相関係数を計算するには、[分析ツール]⇒[相関]を指定する。

**5.3** Excel ファイルを参照

**5.4** Excel ファイルを参照

**5.5** $\overline{X}$ の積率母関数は、 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立であることより

$$m_{\overline{X}}(t) = E\left[e^{t\overline{X}}\right] = E\left[e^{t\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] = E\left[e^{\frac{t}{n}X_1}\right] \cdot E\left[e^{\frac{t}{n}X_2}\right] \cdots E\left[e^{\frac{t}{n}X_n}\right]$$

$$E\left[e^{\frac{t}{n}X_i}\right] = e^{\mu\frac{t}{n}+\frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{t}{n}\right)^2}, \quad \text{for} \quad i = 1, \cdots, n$$

であるので

$$m_{\overline{X}}(t) = e^{n\left(\mu\frac{t}{n}+\frac{1}{2}\sigma^2\left(\frac{t}{n}\right)^2\right)} = e^{\mu t+\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}t^2}$$

となる。これは、$N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ の積率母関数とおなじであるので、$\overline{X}$～$N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ であることがわかる。

**5.6**

$$U_x^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-2X_i\overline{X}+\overline{X}^2\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\frac{n}{n-1}\overline{X}^2$$

ところで、

$$\sigma^2=Var(X_i)=E\left[X_i^2\right]-E\left[X_i\right]^2=E\left[X_i^2\right]-\mu^2$$

$$\frac{\sigma^2}{n}=Var(\overline{X})=E\left[\overline{X}^2\right]-E\left[\overline{X}\right]^2=E\left[\overline{X}^2\right]-\mu^2$$

であるので、

$$E\left[U_x^2\right]=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}E\left[X_i^2\right]-\frac{n}{n-1}E\left[\overline{X}^2\right]=\frac{n}{n-1}\left(\mu+\sigma^2\right)-\frac{n}{n-1}\left(\mu+\frac{\sigma^2}{n}\right)=\sigma^2$$

**5.7** 各単回帰モデルの統計量は Excel ファイル参照

表 5.28 に対応する表を以下に示す。

| 説明変数 | n | p | 重決定 R2 | 補正 R2 | SE | AIC |
|---|---|---|---|---|---|---|
| マネーサプライ | 12 | 1 | 0.12193 | 0.03412 | 0.00386 | −95.477 |
| 公定歩合 | 12 | 1 | 0.87762 | 0.86538 | 0.00144 | −119.12 |

この表と表 5.28 と比べると重決定係数、自由度調整済み決定係数、AIC のどの統計量を見てもマネーサプライの説明力が最も弱いことがわかる。一方、公定歩合の説明力は為替・マネーサプライの 2 変数の場合よりも強いことがわかる。

**5.8** 時刻 $t$ については、1991 年を 1 とし、1992 年を 2、…、2002 年を 12 としている。回帰結果の詳細については Excel ファイルを参照せよ。回帰係数は以下のとおりである。

| | 係数 | 標準誤差 | t |
|---|---|---|---|
| $\beta_0$ | -4.86429 | 0.332831 | -14.6149 |
| $\beta_1$ | -0.08621 | 0.045223 | -1.90645 |

**5.9** 回帰結果は Excel ファイルを参照。表 5.28 に対応する表を以下に示す。

| 説明変数 | n | p | 重決定 R2 | 補正 R2 | SE | AIC |
|---|---|---|---|---|---|---|
| マネーサプライ | 13 | 1 | 0.103638 | 0.02215 | 24.13534 | 123.4963 |
| 公定歩合 | 13 | 1 | 0.688413 | 0.660086 | 14.22989 | 109.7597 |
| 企業倒産率 | 12 | 1 | 0.761372 | 0.737509 | 10.37231 | 94.00603 |
| 公定歩合、企業倒産率 | 12 | 2 | 0.84698 | 0.812976 | 8.755234 | 96.00603 |
| マネーサプライ、公定歩合 | 13 | 2 | 0.741319 | 0.689583 | 13.59847 | 102.2993 |
| マネーサプライ、企業倒産率 | 12 | 2 | 0.776108 | 0.726354 | 10.59042 | 95.24113 |
| マネーサプライ、公定歩合、企業倒産率 | 12 | 3 | 0.878106 | 0.832395 | 8.28823 | 89.94502 |

決定係数でみても、AIC の統計量から判断しても、3 変数での回帰が最も説明力が高いことがわかる。AIC を基準にすると、２変数の回帰でどの組み合わせのものよりも、企業倒産率を１変数として扱った回帰のほうが AIC の値が小さく、説明力が高いことになる。

**5.10** 平均を $a$ 、分散を $\sigma^2$ とすると、これは $X_t = a + \varepsilon_t$, $\sigma^2 = Var[\varepsilon_t]$ とモデル化していることになる。これと AR(1)： $X_t = a + bX_{t-1} + \varepsilon_t$ の結果との比較を下に示す。便宜的に $X_t = a + \varepsilon_t$ モデルを AR(0)と表記した。

| | AR(0) | AR(1) |
|---|---|---|
| 平均 | 0.00912 | 0.00774 |
| 分散 | 0.01278 | 0.00708 |
| AIC | −25.942 | −33.049 |

AIC を基準に説明力を比べると AR(1)の方が高いことになる。

**5.11** 自己回帰の次数と AIC を表に示す。

| p | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| AIC | −33.049 | −39.258 | −36.628 | −32.344 | −28.507 |

これより、次数２の自己回帰モデルの AIC が最小であることから、AIC を基準とすると AR(2)モデルが選択される。

**5.12** 収益率の平均、標準偏差、収益率の相関行列は Excel ファイルを参照。①の場合、②の場合のポートフォリオの平均収益率、収益率の標準偏差、収益率の下側 5%点を以下の表に示す。ただし、標準正規分布の下側５％点は−1.645 として計算している。

| | 投資比率① | 投資比率② |
|---|---|---|
| 平均 | 0.0054 | 0.0064 |
| 標準偏差 | 0.1039 | 0.1106 |
| 下側5％点 | −0.1656 | −0.1756 |

よって、元本を 100 とすると 95%VaR は、投資比率①が 16.56、②の時が 17.56 となる。

## ＜章末問題の解答＞

**6.1** $A_n$ のサンプルパスは Excel ファイルを参照のこと

**6.2** 演習 6.4 の付録 Excel シートをベースに 100 サンプルパスを発生させるマクロを作成しているので Excel ファイルを参照のこと。標本数をｎとすると、正規分布に従っている場合、標本歪度～$N(0,6/n)$、標本尖度～$N(3,24/n)$であることを利用する。なお、Excel ファイルでの尖度は平均がゼロになるように規準化されている。サンプルパス数が 100 なので、有意水準を 5%とすると、歪度が[-0.4801, 0.4801]、尖度が[-0.9602, 0.9602]の範囲であれば正規性を棄却できないことになる。ある 100 サンプルパスでは、歪度が-0.1365、標本尖度が-0.28 となり、正規性は有意水準 5%で棄却されないことがわかる。

**6.3** 章末問題 6.2 と同様に演習 6.7 の付録 Excel シートをベースに 100 サンプルパスを発生させるマクロを作成しているので Excel ファイルを参照のこと。章末問題 6.2 と同様にサンプル数が 100 なので、有意水準を 5%とすると歪度が[-0.4801, 0.4801]、尖度が[-0.9602, 0.9602]の範囲であれば、正規性を棄却できない。ある 100 サンプルパスでは、歪度が-0.2027、標本尖度が-0.1752 となり、正規性は有意水準 5%で棄却されないことがわかる。

**6.4** 仮定より

$$f_i(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{\sigma_i^2}},\ i=X,Y$$

これより、

$$f_{X+Y}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(y)f_Y(x-y)dy=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}}e^{-\frac{(x-y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}dy$$

となる。被積分関数の指数部分を計算すると、

$$-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}-\frac{(x-y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}=-\frac{\sigma_Y^2(x-\mu_X)^2+\sigma_X^2(x-y-\mu_Y)^2}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2}$$

分母を計算すると、

$$\sigma_Y^2(x-\mu_X)^2+\sigma_X^2(x-y-\mu_Y)^2$$
$$=(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)\left(y-\frac{\mu_X\sigma_Y^2+x\sigma_X^2-\mu_Y\sigma_X^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}\right)^2+\sigma_X^2\sigma_Y^2\frac{(x-\mu_X-\mu_Y)^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}$$

であるので、

$$-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}-\frac{(x-y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}=-\frac{(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2}\left(y-\frac{\mu_X\sigma_Y^2+x\sigma_X^2-\mu_Y\sigma_X^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}\right)^2-\frac{(x-\mu_X-\mu_Y)^2}{2(\sigma_X^2+\sigma_Y^2)}$$

となる。よって、

$$
\begin{aligned}
f_{X+Y}(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} e^{-\frac{(x-y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}} e^{-\frac{(x-\mu_X-\mu_Y)^2}{2\left(\sigma_X^2+\sigma_Y^2\right)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}{\sigma_X\sigma_Y}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}}{2\sigma_X^2\sigma_Y^2}\left(y-\frac{\mu_X\sigma_Y^2+x\sigma_X^2-\mu_Y\sigma_X^2}{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}\right)^2} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_X^2+\sigma_Y^2}} e^{-\frac{(x-\mu_X-\mu_Y)^2}{2\left(\sigma_X^2+\sigma_Y^2\right)}}
\end{aligned}
$$

となる。これは、$N(\mu_X+\mu_Y,\sigma_X^2+\sigma_Y^2)$ の確率密度関数であるので、$X+Y$ は $N(\mu_X+\mu_Y,\sigma_X^2+\sigma_Y^2)$ に従うことがわかる。

**6.5** 仮定より、

$$
f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad f_Y(y \mid x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x)} e^{-\frac{(y-\mu(x))^2}{2\sigma(x)^2}}
$$

である。$X+Y$ の確率密度関数を $f_{X+Y}(x)$ とすると、

$$
P\{X+Y \le Z\} = \int_{-\infty}^{Z} f_{X+Y}(x)dx
$$

である。また、$1_{\{\bullet\}}$ を定義関数とし、条件付期待値の性質を用いると

$$
P\{X+Y \le Z\} = E\left[1_{\{X+Y\le Z\}}\right] = E\left[E\left[1_{\{X+Y\le Z\}} \mid X=x\right]\right]
$$

となる。

$$
E\left[1_{\{X+Y\le Z\}} \mid X=x\right] = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{x+y\le Z\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x)} e^{-\frac{(y-\mu(x))^2}{2\sigma(x)^2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\left\{t\le\frac{z-x-\mu(x)}{\sigma(x)}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt
$$

2 番目の等号は、$\dfrac{y-\mu(x)}{\sigma(x)} = t$ と変数変換している。

これより、

$$
\begin{aligned}
P\{X+Y \le Z\} &= E\left[1_{\{X+Y\le Z\}}\right] = E\left[E\left[1_{\{X+Y\le Z\}} \mid X=x\right]\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\left\{t\le\frac{z-x-\mu(x)}{\sigma(x)}\right\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\, dx
\end{aligned}
$$

となる。よって、

$$
f_{X+Y}(Z) = \frac{\partial}{\partial Z} P\{X+Y \le Z\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma(x)} e^{-\frac{(z-x-\mu(x))^2+\sigma(x)^2x^2}{2\sigma(x)^2}} dx
$$

となる。

**6.6** 省略

**6.7** 行列 $\mathbf{P}$ の要素を $p_{ij}$ とする。$\mathbf{P}$ が確率行列であるので

$$p_{ij} \geq 0, \qquad \text{for all} \quad i, j$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

となる。$\mathbf{P}^2$ の要素を $p_{ij}^2$ とすると、$p_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} p_{kj}$ である。$p_{ij} \geq 0$, for all $i, j$ であるので、$p_{ij}^2 \geq 0$ となる。また、

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}^2 = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ik} p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} \sum_{j=1}^{n} p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} = 1$$

となるので $\mathbf{P}^2$ は確率行列であることがわかる。

**6.8** まず、(6.21)を示す。

$$p_{jk}(0,n) = \sum_{i=1}^{n} p_{ji}(0,n-1) p_{ik}(n-1,n) = \sum_{i=1}^{n} P\{X_{n-1} = i \mid X_0 = j\} P\{X_n = k \mid X_{n-1} = i\}$$

次に(6.28)を示す。本文 p182、17 行目の式に(6.25)を代入すると

$$P_0^*(\tau_j > t+1) = \sum_{k=1}^{m} q_{jk}^*(0,t) l_k(t)(1 - p_{k,m+1})$$

となる。これを行列表示すると、

$$\begin{pmatrix} P_0^*(\tau_1 > t+1) \\ \vdots \\ P_0^*(\tau_m > t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11}^*(0,t) & \cdots & q_{1m}^*(0,t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1}^*(0,t) & \cdots & q_{mm}^*(0,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1(t)(1 - p_{1m+1}) \\ \vdots \\ l_m(t)(1 - p_{mm+1}) \end{pmatrix}$$

これより、

$$\begin{pmatrix} l_1(t)(1 - p_{1m+1}) \\ \vdots \\ l_m(t)(1 - p_{mm+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11}^*(0,t) & \cdots & q_{1m}^*(0,t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{m1}^*(0,t) & \cdots & q_{mm}^*(0,t) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_0^*(\tau_1 > t+1) \\ \vdots \\ P_0^*(\tau_m > t+1) \end{pmatrix}$$

行列 $\{q\}_{ij}$ の逆行列の要素を $q_{ij}^{-1}$ と表すと、

$$l_j(t)(1 - p_{jm+1}) = \sum_{k=1}^{m} q_{jk}^*(0,t)^{-1} P_0^*(\tau_k > t+1) = \sum_{k=1}^{m} q_{jk}^*(0,t)^{-1} \frac{v_k(0,t+1) - \delta_k v_0(0,t+1)}{(1-\delta_k) v_0(0,t+1)}$$

となるので、(6.28)が得られることがわかる。

**6.9** $P\{X = n\} = (1-p)p^{n-1}$ とおくと、$P\{X > n\} = p^n$ となる。この式を用いると、

$$P\{X > x+y \mid X > y\} = \frac{P(X > x+y)}{P(X > y)} = \frac{p^{x+y}}{p^y} = p^x = P(X > x)$$

となり、無記憶性をもつことがわかる。

無記憶性を仮定し離散的な確率分布を考える。無記憶性より、$m,n=0,1,2\cdots$に対して

$$P(X>m)=P(X>m+n\,|\,X>n)=\frac{P(X>m+n)}{P(X>n)}$$

となる。これより、

$$P(X>m+n)=P(X>m)P(x>n)$$

$$P(X>m+n+1)=P(X>m+1)P(X>n)=P(X>m)P(X>n+1)$$

となる。よって、

$$\begin{aligned}P(X>m+n)-P(X>m+n+1)&=\{P(X>m)-P(X>m+1)\}P(X>n)\\&=\{P(X>n)-P(X>n+1)\}P(X>m)\end{aligned}$$

であり、$P(X>n)-P(X>n+1)=P(X=n+1)$であるので、

$$\frac{P(X=m+1)}{P(X>m)}=\frac{P(X=n+1}{P(X>n)}=(\mathrm{cons}t)$$

最初の等号は任意の$m,n$で成立するので、これらの値は定数であることがわかり、二番目の等号が成立することになる。この定数を$c$とおくと

$$P(X=1)=c$$

$$P(X=m+1)=cP(X>m)$$

となる。これより、$0\le c\le 1$であることがわかる。また、

$$P(X=2)=cP(X>1)=c-cP(X=1)=c-c^2=c(1-c)$$

$$P(X=3)=cP(X>2)=c-c(P(X=1)+P(X=2))=c-c(c+c-c^2)=c(1-c)^2$$

となるので、これより、$P(X=m)=c(1-c)^{m-1}$と推測できる。ある$m$で$P(X=m)=c(1-c)^{m-1}$が成立していると仮定すると、

$$\begin{aligned}P(X=m+1)&=cP(X>m)=c-cP(X\le m)=c-c\sum_{i=1}^{m}P(X=i)\\&=c-c^2\sum_{i=1}^{m}(1-c)^{i-1}=c-c^2\frac{1-(1-c)^m}{c}=c(1-c)^m\end{aligned}$$

となり、$m+1$のときも成立することがわかる。$m=1$のときに成立しているので、任意の$m$で$P(X=m)=c(1-c)^{m-1}$であることが示された。

この確率分布は幾何分布である。よって、無記憶性を持つ離散確率分布は幾何分布しかないことがわかる。

**6.10** ヒストグラムは Excel ファイル参照のこと。統計量の比較を次の表に示す

| | 演習 6.27 | 章末 6.10 |
|---|---|---|
| 平均 | 4.49 | 4.09 |
| 分散 | 15.3299 | 8.2019 |
| 歪度 | 1.79797 | 0.86229 |
| 尖度 | 6.16559 | 2.64957 |

$T = 10$ のデフォルト時点の上限があるために、演習 6.27 よりも分散が小さく、尖度が小さくなっている(分布の形状がフラットになっている)ことがわかる。

**6.11** ヒストグラムは Excel ファイルを参照のこと。グラフを見ると、演習 6.27 よりも分布が時刻の大きい方向(右側)にシフトしている。それを裏付けるように平均デフォルト時刻を計算すると、演習 6.27 が 4.49、章末 6.11 が 4.92 となっている。

## ＜章末問題の解答＞

**7.1** Excel ファイルを参照のこと

**7.2** Excel ファイルを参照のこと。

**7.3** Excel ファイルを参照のこと。

**7.4** Excel ファイルを参照のこと。標準正規乱数は付属 Excel ファイルの演習 7.9 で発生させた結果をコピーしている。

**7.5** Excel ファイルを参照のこと。標準正規乱数は付属 Excel ファイルの演習 7.8 で発生させた結果をコピーしている。

**7.6** Excel ファイルを参照のこと。標準正規乱数の発生は VBA のプログラムを参照のこと

**7.7** Excel ファイルを参照のこと。

**7.8** $Y_i(0)=0, i=1,2$ として、確率微分方程式を積分すると

$$Y_i(T)=\left(r-\frac{\sigma_i^2}{2}\right)T+\sigma_i z_i(T), \qquad i=1,2$$

である。また、伊藤の積公式より、

$$Y_1(T)Y_2(T)=\int_0^T Y_1(t)dY_2(t)+\int_0^T Y_2(t)dY_1(t)+\int_0^T dY_1(t)dY_2(t)$$

$$=\int_0^T\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)tdt+\int_0^T\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\sigma_2 tdz_2(t)$$

$$+\int_0^T\sigma_1 z_1(t)\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)dt+\int_0^T\sigma_1\sigma_2 z_1(t)dz_2(t)$$

$$+\int_0^T\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)tdt+\int_0^T\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)\sigma_1 tdz_1(t)$$

$$+\int_0^T \left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\sigma_2 z_2(t)dt+\int_0^T \sigma_1\sigma_2 z_2(t)dz_1(t)+\int_0^T \rho\sigma_1\sigma_2 dt$$

となる。この式の両辺の無条件期待値は

$$\int_0^T z_i(t)dt = Tz_i(T)-\int_0^T tdz_i(t)$$

であることと、$z_i(t)$ がマルチンゲール(ブラウン運動)であることから

$$E[Y_1(T)Y_2(T)]=\left(r-\frac{\sigma_1^2}{2}\right)\left(r-\frac{\sigma_2^2}{2}\right)T^2+\rho\sigma_1\sigma_2 T$$

となる。よって、

$$C[Y_1(T),Y_2(T)]=E[Y_1(T)Y_2(T)]-E[Y_1(T)]E[Y_2(T)]=\rho\sigma_1\sigma_2 T$$

となることがわかる。

**7.9** Excel ファイルを参照のこと。付属 Excel ファイルの演習 7.15 の VBA コードにルックバック型のデイ・カウント・オプションの評価を追加している。

# ＜章末問題の解答＞

**8.1** 原資産のボラティリティは

$$\sqrt{(0.4-0.15)^2\times 0.5+(-0.1-0.15)^2\times 0.5}=0.25$$

である。例題 8.5 より原資産のリターンは 0.15、リスクの市場価格は 0.2 であるのでリスク調整後の期待収益率は$0.15-0.2\times 0.25=0.1$となる。また、例題 8.7 よりマルチンゲール確率は 0.4 であるので、期待収益率は$0.4\times 0.4+(-0.1)\times(1-0.4)=0.16-0.06=0.1$となりリスク調整後の期待収益率と同じになることがわかる。

**8.2** $d<u\le r$ とする。この時に原資産をショートし、その資金で無リスク資産をロングすることを考える。時点 **0**、時点１でのキャッシュフローを表に示す。この表より時点ゼロでの損益はゼロで、時点１での損益は仮定より、$r-u\ge 0, r-d>0$であるので、ゼロまたは正の利益が得られることがわかる。つまり、裁定機会が生じていることがわかる。

| | 時点 0 | 時点 1 |
|---|---|---|
| 原資産 | $S_0$ | $-uS_0$ |
| | | $-dS_0$ |
| 無リスク資産 | $-S_0$ | $rS_0$ |
| | | $rS_0$ |
| ネット損益 | 0 | $(r-u)S_0$ |
| | | $(r-d)S_0$ |

$r\le d<u$ とする。この時に無リスク資産をショートし、その資金で原資産をロングすることを考える。$d<u\le r$ の場合と同様の表を下に示す。$d-r\ge 0, u-r>0$であるので、ゼロまたは正の利益が得られることがわかる。つまり、裁定機会が生じていることがわかる。

| | 時点 0 | 時点 1 |
|---|---|---|
| 原資産 | $-S_0$ | $uS_0$ |
| | | $dS_0$ |
| 無リスク資産 | $S_0$ | $-rS_0$ |
| | | $-rS_0$ |
| ネット損益 | 0 | $(u-r)S_0$ |
| | | $(d-r)S_0$ |

よって、$d<u\le r$ または$r\le d<u$ ならば裁定機会が生じる。ゆえに、これの対偶より、$d<r<u$ ならば裁定機会が無いことがわかる。

**8.3** 付録 CD-ROM にある Excel ファイルを参照のこと。

**8.4** Excel ファイルを参照のこと。

**8.5** Excel ファイルを参照のこと。

**8.6**

$$\phi(d)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d^2}{2}},$$

$$d=\frac{\log\left(\frac{S}{K}\right)+r(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}+\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

であるので、これを用いると

$$\phi(d-\sigma\sqrt{T-t})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(d-\sigma\sqrt{T-t}\right)^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{d^2}{2}}e^{\sigma\sqrt{T-t}\times d-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}=\phi(d)e^{\log\left(\frac{S}{K}\right)+r(T-t)}$$

となる。これより、

$$\phi(d)=\frac{K}{S}e^{-r(T-t)}\phi\left(d-\sigma\sqrt{T-t}\right)$$

となる。

次に(8.20)の $f(S,t)$ がブラック・ショールズの偏微分方程式と境界条件を満たすことを確かめる。

$$\frac{\partial f(S,t)}{\partial t}=\left(\frac{\partial d}{\partial t}\right)S\left(\phi(d)-\frac{K}{S}e^{-r(T-t)}\phi(d-\sigma\sqrt{T-t})\right)$$

$$-rKe^{-r(T-t)}\Phi(d-\sigma\sqrt{T-t})-\frac{\sigma Ke^{-r(T-t)}\phi(d-\sigma\sqrt{T-t})}{2\sqrt{T-t}}$$

$$=-rKe^{-r(T-t)}\Phi(d-\sigma\sqrt{T-t})-\frac{\sigma Ke^{-r(T-t)}\phi(d-\sigma\sqrt{T-t})}{2\sqrt{T-t}}$$

$$\frac{\partial f(S,t)}{\partial S}=\Phi(d)+\left(\frac{\partial d}{\partial S}\right)S\left(\phi(d)-\frac{K}{S}e^{-r(T-t)}\phi(d-\sigma\sqrt{T-t})\right)=\Phi(d)$$

$$\frac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2}=\phi(d)\frac{\partial d}{\partial S}=\frac{\phi(d)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$$

これらを(8.18)の左辺に代入すると

$$
\begin{aligned}
& rS\frac{\partial f(S,t)}{\partial S}+\frac{\partial f(S,t)}{\partial t}+\frac{\sigma^2S^2}{2}\frac{\partial^2 f(S,t)}{\partial S^2} \\
&\quad = rS\Phi(d)-rKe^{-r(T-t)}\Phi(d-\sigma\sqrt{T-t})-\frac{\sigma Ke^{-r(T-t)}\phi(d-\sigma\sqrt{T-t})}{2\sqrt{T-t}}+\frac{\sigma S\phi(d)}{2\sqrt{T-t}} \\
&\quad = r\left\{S\Phi(d)-Ke^{-r(T-t)}\Phi(d-\sigma\sqrt{T-t})\right\} \\
&\qquad\qquad +\frac{\sigma S}{2\sqrt{T-t}}\left\{\phi(d)-\frac{K}{S}e^{-r(T-t)}\phi(d-\sigma\sqrt{T-t})\right\} \\
&\quad = rf(S,t)
\end{aligned}
$$

となる。また境界条件は

$$
\lim_{t\to T}d(t)=\begin{cases}+\infty & S>K\\ 0 & S=K\\ -\infty & S<K\end{cases}\qquad \lim_{t\to T}\left[d(t)-\sigma\sqrt{T-t}\right]=\begin{cases}+\infty & S>K\\ 0 & S=K\\ -\infty & S<K\end{cases}
$$

であることを利用すると

$$
\lim_{t\to T}f(S,t)=\begin{cases}S-K & S>K\\ S-K=0 & S=K\\ 0 & S<K\end{cases}
$$

であり、これは、$\max(S-K,0)$ と同じであることがわかる。

**8.7**

$$
\begin{aligned}
dS^*(t) &= d\left(S(t)e^{-rt}\right)=dS(t)\cdot e^{-rt}+S(t)\cdot(-re^{-rt}dt) \\
&= rS(t)e^{-rt}dt+\sigma S(t)e^{-rt}dz^*(t)-rS(t)e^{-rt}dt \\
&= \sigma S^*(t)dz^*(t)
\end{aligned}
$$

**8.8** Excel ファイルを参照のこと。

**8.9** Excel ファイルを参照のこと。

**8.10　(8.28)**式より

$$
f(t,S)=Ke^{-\frac{s-1}{2}x-\frac{(s+1)^2}{4}\tau}g(\tau,x)
$$

であり、簡単のため $A=\exp\left\{-\frac{s-1}{2}x-\frac{(s+1)^2}{4}\tau\right\}$ の表記を用いる。

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \tau}[KAg(\tau,x)]=-\frac{\sigma^2}{2}KA\left[\frac{\partial g}{\partial \tau}-\frac{(s+1)^2}{4}g\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial S}=\frac{\partial x}{\partial S}\frac{\partial}{\partial x}[KAg(\tau,x)]=\frac{KA}{S}\left[\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{s-1}{2}g\right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}=-\frac{KA}{S^2}\left[\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{s-1}{2}g\right]+\frac{KA}{S^2}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-(s-1)\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{(s-1)^2}{4}g\right]$$

であるので、

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rS\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}-rf=0$$

に代入すると、

$$-\frac{\sigma^2}{2}KA\left[\frac{\partial g}{\partial \tau}-\frac{(s+1)^2}{4}g\right]+rKA\left[\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{s-1}{2}g\right]$$

$$+\frac{\sigma^2 KA}{2}\left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-s\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{(s-1)^2+2(s-1)}{4}g\right]-rKAg$$

$$=0$$

となる。整理すると、

$$-\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{\partial g}{\partial \tau}-\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right]+\left[r-\frac{\sigma^2}{2}s\right]\frac{\partial g}{\partial x}+\left[\frac{\sigma^2 s^2+\sigma^2 s-2rs-2r}{4}\right]g=0$$

$s=\dfrac{2r}{\sigma^2}$ であるので

$$r-\frac{\sigma^2}{2}\frac{2r}{\sigma^2}=r-r=0,$$

$$\sigma^2 s^2+\sigma^2 s-2rs-2r=\frac{4r^2}{\sigma^2}+2r-\frac{4r^2}{\sigma^2}-2r=0$$

ゆえに

$$\frac{\partial g}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$$

となることがわかる。

**8.11** Excel ファイルを参照のこと。

**8.12** 省略